www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé, sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PRELIMINAIRE

Soit E_n l'espace $\mathbb{R}^n$ muni d'une structure euclidienne. $\langle \vec{v_1} \mid \vec{v_2} \rangle$ représente le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ et $\| \vec{v} \|$ la norme euclidienne du vecteur $\vec{v}$.

On considère dans E_n une base B orthonormée et un sous-espace vectoriel L de dimension r ($r < n$), dont $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r})$ est une base orthonormée. On note V la matrice à n lignes et r colonnes des composantes de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}$ dans la base B, et ${}^tV$ la transposée de la matrice V.

Soit p la projection orthogonale sur L définie par : pour tout $\vec{u} \in E_n$, $p(\vec{u})$ est le vecteur de L tel que $\vec{u} - p(\vec{u})$ est orthogonal à L.

On note P la matrice de p dans la base B.

a) Calculer ${}^tV.V$

b) Montrer que, pour tout $\vec{u} \in E_n$,

$$p(\vec{u}) = \langle u | v_1 \rangle \vec{v_1} + \ldots + \langle u | v_r \rangle \vec{v_r}$$

c) Si U est la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans la base B, montrer que ${}^t V \,.\, U$ est la matrice des composantes de $p(\vec{u})$ dans la base $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r})$. En déduire que $P = V \,.\, {}^tV$

<u>On suppose dans toute la suite du problème que n = 3</u>

Donc E_3 est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la base orthonormée directe B considérée est alors notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les notations utilisées sont celles du préliminaire.

PARTIE I

On considère le vecteur normé $\vec{n} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ de E_3

Soit D la droite vectorielle orientée par $\vec{n}$ et π le plan vectoriel orthogonal à D (π est orienté corrélativement à D)

On désigne par p et q les projections orthogonales respectivement sur D et sur π. On note P et Q leurs matrices respectives dans la base B.

A.1- Déterminer la matrice P de p dans la base B
Quelle relation lie P à $P^2 = P.P$

Tournez la page S.V.P.

En utilisant la question b) du préliminaire, exprimer pour tout $\vec{u} \in E_3$, $p(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

2- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de p.

B. Soit φ l'application de E_3 dans E_3, qui à tout vecteur $\vec{u}$ de E_3 associe le produit vectoriel $\varphi(\vec{u}) = \vec{n} \wedge \vec{u}$

1- Démontrer que φ est un endomorphisme de E_3 dont on déterminera le noyau et l'image.

2- Déterminer la matrice $\varnothing$ de φ, relative à la base B

3- Vérifier que $\varphi \circ q = \varphi$. Comparer les normes de $\varphi(\vec{u})$ et de $q(\vec{u})$ et déterminer l'angle de vecteurs $(q(\vec{u}), \varphi(\vec{u}))$

4- Démontrer que $\varphi \circ \varphi = -q$ et en déduire que,

$\forall \vec{u} \in E_3$, $\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) = \langle \vec{n} \mid \vec{u} \rangle \vec{n} - \vec{u}$

C. Soit f l'application de E_3 dans E_3 définie par $f = p + \varphi$

1- Montrer que f est un automorphisme de E_3
Donner la matrice de f relative à la base B. Vérifier que celle-ci est orthogonale.

2- Démontrer que $f(\vec{n}) = \vec{n}$ et caractériser la restriction de f à π (on pourra utiliser les résultats établis en B.3 de cette partie).

En déduire la nature et les éléments de f.

3- On note $s = f \circ f$.
Démontrer que, $\forall \vec{u} \in E_3$, $s(\vec{u}) = 2 \langle \vec{u} \mid \vec{n} \rangle \vec{n} - \vec{u}$
Caractériser l'application s en précisant ses éléments remarquables.

PARTIE II

On considère trois vecteurs normés $\vec{n}$, $\vec{n}'$, $\vec{n}''$ de E_3, linéairement indépendants

$\vec{n} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$

$\vec{n}' = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j} + \gamma' \vec{k}$

$\vec{n}'' = \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j} + \gamma'' \vec{k}$

On note D, D', D" les droites vectorielles orientées respectivement par $\vec{n}$, $\vec{n}'$ et $\vec{n}''$; p, p' et p" sont les projections vectorielles orthogonales sur D, D', D" et P, P', P" leurs matrices respectives.

1- On considère l'endomorphisme t = a p + b p' + c p" de matrice T = a P + b P' + c P" (où a, b, c, sont trois réels distincts deux à deux).

Exprimer $t(\vec{n})$, $t(\vec{n'})$, $t(\vec{n"})$ à l'aide des vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n'}$ et $\vec{n"}$.

En utilisant la matrice de t dans la base $(\vec{n}, \vec{n'}, \vec{n"})$, exprimer alors le polynôme caractéristique de T sous la forme d'un déterminant d'ordre 3 dont les éléments dépendent de a, b, c, $\langle \vec{n} \mid \vec{n'} \rangle$, $\langle \vec{n'} \mid \vec{n"} \rangle$, $\langle \vec{n"} \mid \vec{n} \rangle$.

2- Montrer que, quelque soient les réels a, b, c, distincts, les valeurs propres de T sont a, b et c si et seulement si la base $(\vec{n}, \vec{n'}, \vec{n"})$ est orthonormée.

quels sont alors les sous-espaces propres de T associés à chacune de ces valeurs propres ?

3- On appelle $\mathcal{T}$ L'ensemble des matrices de la forme aP + bP' + cP" vérifiant la condition du 2-

Démontrer qu'une matrice M d'ordre 3 appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si M est symétrique et a ses trois valeurs propres distinctes.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice quelconque d'ordre 3 soit la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'une projection vectorielle orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension 1.

4- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E_3, exprimer simplement $(p \circ p')(\vec{u})$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de p o p' (on distinguera deux cas : $\langle \vec{n} \mid \vec{n'} \rangle = 0$ $\langle \vec{n} \mid \vec{n'} \rangle \neq 0$)

PARTIE III

On se propose, dans cette partie, de démontrer que toute rotation de E_3 se décompose en un produit de deux symétries vectorielles orthogonales par rapport à des droites.

1- Soit θ un réel ; on considère la rotation r, d'angle θ, d'axe D orienté par le vecteur unitaire $\vec{n} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$.

Démontrer que :
$r = \cos\theta \, id + (1-\cos\theta)p + \sin\theta \, \varphi$ où id est l'application identique, de matrice Id, p et φ sont les endomorphismes définis dans les parties I et II.

Tournez la page S.V.P.

On note R la matrice de r dans la base B.

2- $\vec{n}$ étant donné, montrer qu'il existe une seule rotation r dont la matrice est symétrique et différente de Id.

Vérifier que cette rotation est l'endomorphisme s défini dans la partie I au C.3.

Exprimer sa matrice S dans la base B en fonction de P.

3- Soient s' et s" les symétries vectorielles orthogonales d'axes respectifs D' et D" orientés respectivement par les vecteurs unitaires

$\vec{n'} = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j} + \gamma'\vec{k}$

$\vec{n"} = \alpha"\vec{i} + \beta"\vec{j} + \gamma"\vec{k}$ linéairement indépendants, de matrice respective S' et S" dans B ; p' et p" sont les projections orthogonales respectivement sur D' et D", de matrices P' et P" dans B.

a) Exprimer S'.S" à l'aide des matrice P' et P".

b) Soit Σ la matrice égale à Id - 2 $(P'-P")^2$. Montrer que Σ est symétrique et que S'. S" = Σ + A où A est une matrice antisymétrique à déterminer en fonction de P' et P".

c) En utilisant la méthode de la question 1- de la partie II, déterminer les valeurs propres de P' - P" puis les valeurs propres et les vecteurs propres de Σ.

4- La rotation r est donnée, avec $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

a) En identifiant Σ + A à R, caractériser les vecteurs $\vec{n'}$ et $\vec{n"}$ tels que r = s' o s".

[On pourra montrer que :

$$P = \frac{\Sigma - \cos\theta \ Id}{1 - \cos\theta}$$ et utiliser la question 3 de la partie II]

b) Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

5- Soit $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

Déterminer la matrice R de la rotation r dans la base B.

Montrer que l'on peut choisir $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k})$.

Déterminer la matrice S' de s', puis celle de s", S", dans la base B. Déterminer alors $\vec{n"}$ et vérifier les conditions de la question 4- de cette partie.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail